MAI 1 - domácí úkol ze cvičení 3:

1. Na cvičení dokázali, že $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pro $a \in (1,\infty)$, odtud pak můžete snadno ukázat, že $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ i pro $a \in (0,1)$.

2. Problémky (dobrovolně) – vyberte si:
   a) Zkuste dokázat (a důkaz podrobně napište), že $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

   nebo

   b) Dokažte, že platí (pokuste důkaz opět podrobně sepsat) :
   Jestliže existuje $n_0 \in N$ tak, že pro všechna $n > n_0$ je $a_n \le b_n$ a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, pak také $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$. (Modifikace věty o četnících pro limitu ∞.)
   (A odtud opět lze snadno spočítat $\lim\limits_{n\to\infty} n(2-\sin n)$ a nebo $\lim\limits_{n\to\infty} (n^2 + \cos n)$.)

   nebo

   c) Dokažte následující tvrzení:
   Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, a \in R$ a nechť platí $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \forall n > n_0 : |a_n - b_n| < \varepsilon$. Potom také $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

   nebo

   d) Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, a > 0$, pak je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$. Zvažte, zda tvrzení platí i pro $a = 0$ ($a_n > 0$) .
   A zkuste pak spočítat limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n}$.

3. Užití věty o „četnících“:
   Ukažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \ldots\ldots \frac{1}{n+\sqrt{n-1}} + \frac{1}{n+\sqrt{n}} \right) = 1$.

A dobrovolně si můžete promyslet (aplikace věty o limitě monotónní posloupnosti):

a) Definujme rekurentně posloupnost $\{a_n\}$, kde $a_1 = 10$, $a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n}$. Ukažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 5$.
(Návod: ukažte, že daná posloupnost je klesající, zdola omezená)

b) Na cvičení jsme ukázali, že platí:
(i) Je-li $0 \le a_n$, $n \in N$, pak posloupnost $\left\{ \sum\limits_{n=1}^{N} a_n \right\}$ konverguje nebo diverguje k $+\infty$.
(ii) Je-li $0 \le a_n \le b_n$, $n \in N$, potom, konverguje-li posloupnost $\left\{ \sum\limits_{n=1}^{N} b_n \right\}$, pak také konverguje posloupnost $\left\{ \sum\limits_{n=1}^{N} a_n \right\}$.

Ukažte pak, že konvergují posloupnosti
(i) $\left\{ \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n.2^n} \right\}$; (ii) $\left\{ \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n!} \right\}$.
(Návod: lze užít b) a to, co víte o geometrické řadě.)